Probabilité

Chapitre 1 : Espace de Probabl

le calcul des prob fait appelé à 2 outil math

+ la théorie des ensemble
+ l'analyse combinatoire

I - Def d'1 exp aléatoire :

Une exp aléa est en epreuve dont le resultat dépend de hasard. ex : le jét d'1 dé

c'est une epreuve aléatoire le resultat n'est pas connu à l'avance.

les diff resultats possible : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

cet E est appelé l'univers des possibles ou l'E fondamental noté Ω

1- Definitions :

* Experience aléatoire : Exp dont les resultat est incertain
* Univers des possibles : E de ttes les issues possibles associés à une exp aléa noté Ω (E fondamental)

ex : on jette 2 pièces de monnais

$\Omega = \{(PP), (PF), (FP), (FF)\}$

evenement :

Chaque E de Ω appelés evenement

si l'evnmt contient un seul élémt, il est appelé évt aléatoire.

ex : on jette un dé

Soit l'évnt A av 1 nbr pair

B " " impair

C " " < 2

D " " < 1

E " " 1 ≤ ≤ 6

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 3, 5\}$

$C = \{1\}$ $D = \emptyset$

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

C évènement élémentaire

D evt impossible

E evt certain

$P(D) = 0$ $P(E) = 1$

2 - La Notion de prob :

la Prob peut etre definie comme le rapport des cas favorables à un evt A au nb de cas possibles

$$P(A) = \frac{\text{Cas fav à l'evt } A}{\text{cas Possibles}}$$

ex : On jette une pièce de monnais

$P(\text{pile}) = 1/2$

$P(\text{face}) = 1/2$

ex : On jette une pièce de monnais

Pile Pile ?

$\Omega = \{(FF)\ (FP)\ (PF)\ (PP)\}$

$P(A) = 1/4$

3 - Evt et Propriétés

a - Evt indépendants :

2 evt A et B sont indépendants ssi la realisation de l'un ne dépend pas de la realisation de l'autre

l'indép implique $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

si les evts ne sont pas indép

Alors $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

$P(B/A) = (P($ le resultat de l'act A est deja réalisé $)$

b_ Evt incompatibles :

Deux evt sont incompatible : ne peuvent pas se realiser simultanément.

A : avoir nb pair

B : - impair

A B

$A \cap B = \phi$

$P(A \cap B) = 0$

l'incompatibilité implique que $A \cap B = \phi$

$P(A \cap B) = 0$

Independance $P(A \cap B) = 0$

Incompatibilité $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Equiprobabilité :

si les resultats elementaires de Ω sont de la m̂ prob de se realiser alors il sont Equiprobable de prob $\frac{1}{n}$ avec card = n, ex : jet d'1 dé

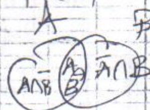
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $p = 1/6$

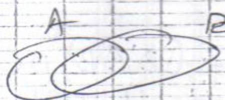
card Ω = 6

d_ theorie des prob totales

Soit A et B deux evt de Ω

$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$





$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - p(A \cap B)$

$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$

Si A et B sont 2 evt incompatibles alors

$p(A \cup B)$

I_ Opérations des ensembles :

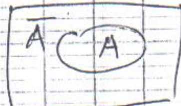
$A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$



$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

l'evt contraire $\bar{A}$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$



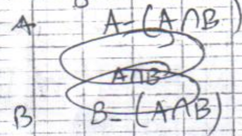
$A \cup \bar{A} = \Omega$

$A \cap B \cap C = \{x / x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \in C\}$



$\overline{A \cup B \cup C} = \Omega$

Diagramme de Venn







$P(A \cup B) = P(A \cup (B - (A \cap B)))$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)]$

lois de l'algèbre des E

- la loi indépendante

$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

- la loi associative

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- la loi Commutative

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

- les loi de distributivité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

loi d'identité

$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$

III _ les axiomes du calcul des prob

Soit un $\mathcal{E}$ fondam. Ω à n issues poss, attaché à une expérience aléatoire

$(\Omega, P(\Omega))$ espace probabilisable

$(\Omega, P(\Omega), p)$ espace de prob

ex : jet d'1 pièce $\Omega = \{Pile, Face\}$

$P(\Omega) = \{\emptyset, \{P\} \{F\} \{P, F\}\}$

On appelle prob une application de Ω dans $[0, 1]$ qui satisfait les axiomes suivant

Axiome 1 : Pour tt evt A.

$0 \leq p(A) \leq 1$

Axiome 2 : de certitude

$P(\Omega) = 1$

Axiome 3 : d'additivité

si A_1 et A_2 incompatible, Alors

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$

Rq : Evt contraire, ex : jet un dé

A : avoir un nb pair $p = \{2, 4, 6\}$

$\bar{A}$: $p\{1, 3, 5\}$ $\quad A \cap \bar{A} = \emptyset \quad A \cup \bar{A} = 1$

Pour tt evt $\quad P(\bar{A}) = 1 - p(A)$

$p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$

$P(\Omega) = p(A) + P(\bar{A})$

$1 = p(A) + p(\bar{A})$

d'où $\quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

$P(\emptyset) = 0 \quad \emptyset = \bar{\Omega}$

$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Systm Complet :

$A_1, A_2 \ldots A_n$ systm complet A_i

$P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) \ldots P(A_n)$

càd $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Exercices :

Ex 1 Soit 2 évt A et B

$P(A) = 0,3$ $P(B) = 0,6$ $P(A \cap B) = 0,1$

a- les évt A et B sont-ils indépendant

$P(A) \cdot P(B) = 0,18$

$P(A \cap B) = 0,1$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

d'où A et B sont 2 évt in D

b. Calculer les prob de chacun des évt suivant :

* au moins un des 2 évt A et B se réalise

(A ou B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,8$

* A seulement se réalise :

$P(A \cap \overline{B})$

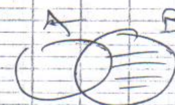


$= P(A) - P(A \cap B)$

$= 0,2$

* B seulement se réalise :

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



$= 0,5$

* ni A ni B se réalise

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 0,2$

6

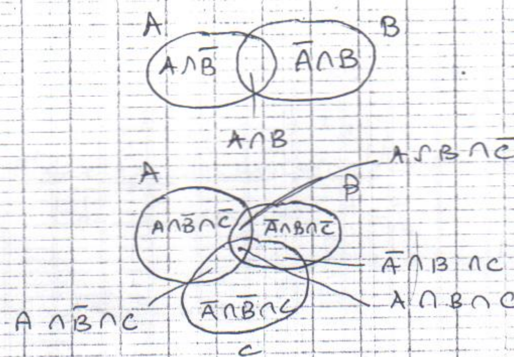
* A ou B mais seulement 1 se réalise

$P((A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)) = P(A\cap\bar{B}) + P(\bar{A}\cap B)$

$= 0,2 + 0,5 = 0,7$

Ex 2

- Donner le diagramme de venn pour le cas de 2 evt et 3 evts
- Calculer card $A\cap B\cap\bar{C}$



- card $A\cap B\cap\bar{C}$ = card $(A\cap B)$ - card $(A\cap B\cap C)$

Ex 3 : Des lecteurs peuvent lire 3 revues A, B, C

On note : l'evt A : lire la revue A

B : — — B

C : — — C

Décrire à partir des evt A, B, C les évts

E = { le lecteur ne lit qu'1 revue }

F = { le lecteur lit exactement 2 revues }

G = { le lecteur lit au moins une revue }

$E = (A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) \cup (\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) \cup (\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$

$F = (\bar{A}\cap B\cap C) \cup (A\cap\bar{B}\cap C) \cup (A\cap B\cap\bar{C})$

$G = E\cup F\cup (A\cap B\cap C)$

H

$H = \{$ le lecteur ne lit aucune revue $\}$

$H = \emptyset$

$P(H) = 0$

$I = \{$ le lecteur lit au plus une revue $\}$

8

Chapitre 2 :

Dénombrement et Analyse Combinatoire.

L'objectif de l'analyse combinatoire est le dénombrement (comptage) de grps d'élmts qu'on peut construire à partir d'1 ensemble fini.

I- Déf :

Eléments discernables : si un ensemble E est formé des élmts tous diff

$E = \{a, b, c, d, e, f\}$

Eléments indiscernables : si certains élmts de E se répètent

$E = \{a, a, b, b, b, c\}$

Echantillon sans répétition :

On prend chaque objet qu'1 seule fois ou plus d'un échantillon ordonné, on tient compte de l'ordre la permutation de deux élmts donne un échantillon diff.

Arrivée du Tiercé

ds l'ordre : 5, 3, 8

ds le désordre : 3, 8, 5 ; 5, 3, 8

II- Notation factorielle :

le produit des entiers naturels de 1 à n est noté $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$

$0! = 1$

$\frac{8!}{7!} = \frac{8 \times 7!}{7!} = 8$

II – Permutation :

1 – Permutation sans répétition :

Def : une permutation de n élmt est une disposition ordonnée de l'ens. de ces n éléments. chaque élmt n'apparait qu'une seule fois.

la permutation de n élément est :

$$P_n = n.(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1 = n!$$

Ex : disposer 3 livres sur étagère :

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$$

On fait appel à la permutation sans répétition si
* on prend n objet parmi n
* on tient compte de l'ordre.
* pas de répétition.

Ex :

* le nb de manière de placer 8 personnes autour d'1 table : $P_8 = 8!$
* le nb de manière de placer 8 personne tq 1 couple reste l'un à côté de l'autre :

$$P_8 = 7!$$

* 10 tomes d'1 encyclopédie sont placés au hasard.
  a – Combien y'a-t-il de manière de les placer.
  b – Parmi ces classements, combien y'a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte
  c – — — — — côte à côte dans cet ordre

a – $P_{10} = 10!$

(1,2) (2,1) b – $2 \times 9!$

c – $9!$

2. Permutation avec rép :
si l'on a à rendre un pb de perm où certains éléments se répètent on utilisera la formule suivante

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = P_{n;n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} = \frac{\text{nb de perm total}}{\text{nb de perm d'éléments identiques}}$$

Ex : 12 boules : 3 vert, 2 rouges, 6 bleues, 1 Noire
Combien de façons diff peut on les tirer ?

* l'ordre
* 12 boules parmis 12
* Eventualité de répétition

$$P_{12}^{3,2,6,1} = P_{12;3,2,6,1} = \frac{12!}{3!\,2!\,6!\,1!} = 55\,440$$

III_ Arrangement :
1_ Arrangement sans répétition
Déf : Un arrangement de k éléments choisi parmi n est une disposition ordonnée de l'élément parmi n ; chacun d'entre eux ne peut figurer.
n fait appel à arrang. s.rép lorsque
* On prend k objet parmis n $k \leq n$
* l'ordre
* pas de répétition
Notation A_n^k
le 1er élt sera choisi de n façons

le 2e élmt sera choisi de $(n-1)$

le $k^{ème}$ $n-(k-1)$

$n-k+1$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k+1))(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>Cas particulier</u>:

$$A_n^n = n!$$

On retrouve la permutation sans répétition

<u>Ex</u>: On dispose des 6 1ère lettre de l'alphabet

a – Combien de code de 6 lettres distincts

b – — — — de 4 — —

c – — — 4 lettres.

a – $6!$

b – $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$

c – $A_6^4 = 6^4 = 1296$

2 – Arrangement avec répétition

— — — de "k" ces élmts choisi parmis n et une disposition ordonnée avec répétition éventielle

12

$A_n^k = n^k$

* fait appel aux arrangement avec rép.
* k objet parmis n
* l'ordre
* rép éventuelle des éléments.

Ex : De combien de façons placer 4 lettres diff dans 20 boît de lettres

a - 1 lettre par boite

b - 4 le nb de boîte

a - A_{20}^4

b - $A_{20}^4 = 20^4$

III - Combinaison :

1 - Combinaison sans répétition :

on prend k objet parmis n, pas de rép, on ne tient pas compte de l'ordre

si on combine 4 éléments a, b, c, d deux à deux, on obtient :

ab, ac, ad, bc, bd, cd

la combinaison est une disposition non ordonnée.

Déf : une combinaison de k éléments choisi parmi n est une disposition non ordonnée de ces k éléments où chacun figure au plus une fois

on note $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$k!\,C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

Ds une combinaison l'ordre n'intervient pas.

Propriétés des combinaisons :

* $C_n^0 = C_n^n = 1$ $\qquad C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

$C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

* $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$
$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
$= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$
$= \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)} + \frac{(n-1)!\cdot k}{k\,(k-1)!\,(n-k)!}$
$= \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$

* $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$
$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$

ex : a_ Calculer la prob de gagner ds l'ordre le tiercé d'1 course comprenant 20 chevaux
b_ m̂ question si l'ordre n'intervient pas.

a_ $A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 6840$

la prob de gagner ds l'ordre $p = \frac{1}{6840} = 0,14\ \%$

b_ $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\,17!} = 1140$ tiercé

$p' = \frac{1}{1140} = 0,87\ \%$

ex : un comité comporte 9 hommes et 3 femmes :
a_ De combien de façons pt-on faire le choix de 4 pers ?
b_ Combien de choix comportant au moins une femme.
c_ Combien comportent exactement 1 fois

14

a – C_{12}^4

b – $C_3^1 C_9^3 + C_3^2 C_9^2 + C_3^3 + C_9^1$

ou $C_{12}^4 - C_9^4$

c – $C_3^1 C_9^3$

ex : un sac contient 10 boules dont 4 blanches et 6 Noires. On tire 3 boules, calculer la probabilité d'avoir 3 boules blanches

b – des boules de couleurs diff

a – cas possibles : C_{10}^3

cas favorables C_4^3 $P = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$

b – on a 2 possibilités

A : 2B et 1N

B : 1B et 2N

$P(A \cup B) = \frac{C_4^2 \; C_6^1}{C_{10}^3} + \frac{C_4^1 \; C_6^2}{C_{10}^3}$

$= 0,8$

ex : Soit un jeu de 52 cartes, on tire 3 cartes

a – obtenir 2 valet et 1 Roi.

b – " 3 cartes de la même couleur

c – " au moins un as.

Cas possibles C_{52}^3

a – $\frac{C_4^2 \; C_4^1}{C_{52}^3} = 0,001$

b – $\frac{4 \times C_{13}^3}{C_{52}^3}$

c – $\bar{c}$: avoir aucun as

$p(\bar{c}) = \frac{C_{48}^3}{C_{52}^3} = 0,7826$

$p(c) = 1 - p(\bar{c}) = 0,2174$

2 - Combinaison avec répétition :

- On prend k objet parmi n.
- l'ordre n'intervient pas
- répétition éventuelle de qq éléments

Pour un problème de Combinaison avec rép, on utilise la formule suivante

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$$

$$= \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

ex : Quel est le nb de tirages avec remise de 6 boules dans un sac contenant 10, l'ordre du tirage n'intervient pas.

$$K_{10}^6 = C_{15}^6 = C_{15}^9$$

$$= \frac{15!}{6!\,9!} = 5005 \text{ résultat poss}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Ex : 3 objet a, b, c avec lesquels on veut faire des ensembles de 3 éléments en les répétant

$$K_3^3 = C_5^3 = 10$$

{a, a, a} {b, b, b} {c, c, c}
{a, a, b} {a a c} {b, b, a}
{b, b, c} {c, c, a} {c, a, b}
{a, b, c}

V - Formule du binôme de Newton :

Soient 2 nbs réels a, b et n entier naturel $n \geq 1$,

On a $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

16

$$(a+b)^2 = C_2^0\, a^2 b^0 + C_2^1\, a^1 b^1 + C_2^2\, a^0 b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = C_3^0\, a^3 b^0 + C_3^1\, a^2 b^1 + C_3^2\, a^1 b^2 + C_3^3\, a^0 b^3$$
$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^5 = C_5^0\, a^5 b^0 + C_5^1\, a^4 b^1 + C_5^2\, a^3 b^2 + C_5^3\, a^2 b^3 + C_5^4\, a^1 b^4 + C_5^5\, a^0 b^5$$
$$= a^5 + 5a^4 b^1 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = C_6^0\, a^6 b^0 + C_6^1\, a^5 b^1 + C_6^2\, a^4 b^2 + C_6^3\, a^3 b^3 + C_6^4\, a^2 b^4 + C_6^5\, a^1 b^5 + C_6^6\, a^0 b^6$$
$$= a^6 + 6a^5 b^1 + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = C_7^0\, a^7 b^0 + C_7^1\, a^6 b^1 + C_7^2\, a^5 b^2 + C_7^3\, a^4 b^3 + C_7^4\, a^3 b^4 + C_7^5\, a^2 b^5 + C_7^6\, a^1 b^6 + C_7^7\, a^0 b^7$$
$$=$$

Le développement de $(a+b)^n$ possède les propriétés suivantes :

* Il y a $(n+1)$ termes
* La somme des exposants au niveau de chaque terme est n
* l'exposant de a décroît de n à 0.
* b croît de 0 à n
* le coeff de chaque terme est C_n^k.

ex : M_1 $\quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

On a $2^n = (1+1)^n = \sum C_n^k\, 1^{n-k}\, 1^k$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

IV. Triangle de Pascal

On remarque que les coef. des puissances de $(a+b)^n$ peuvent être rangés dans un tableau triangulaire appelé triangle de Pascal.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
1  7  21  35  35  21  7  1
```

Le triangle de Pascal possède les propriétés suivantes :

* le 1er et le Der terme de chaque ligne est 1
* chaque nb du tableau peut être obtenu en ajoutant les 2 nbs situés au dessus de lui.

ex : De combien de façons diff peut-on placer 7 livres sur une étagère d'une bibliothèque

a – Ds n'importe quel ordre

b – si 3 livres particuliers doivent tjs être ensemble

c – si 2 livres particuliers doivent prendre les positions extrêmes

a – $7!$

b – $3!\,5!$ $\underbrace{1, 2, 3}, 4, 5, 6, 7$

c – $2!\,5!$ (1), 2, 3, 4, 5, 6, (7)

18

Chapitre III : la prob conditionnelle.

Soit 2 évnmt A et B liés à une expérience aléatoire n le prob. qté l'evnt A sachant que l'evnt B est déjà réalisé on note $p(A/B)$

$p(A/B) \neq p(A)$

l'evnt B a une influence sur l'evnt A

si A et B sont 2 evnts indépendant alors $p(A/B) = p(A)$ et $p(B/A) = p(B)$

1. Déf :

soit 2 evnt A et B la prob condit de la réalisation de A par rapport à B est la prob de l'evnt A se réalise sachant que l'evnt B est déjà réalise

on note $p(A/B)$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

avec $p(B) \neq 0$

De même : $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

avec $p(A) \neq 0$

2 - propriétés :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

D'où $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$

$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$

- Si A et B sont 2 evnts incompatibles alors $p(A \cap B) = 0$ donc $p(A/B) = 0$ $p(B/A) = 0$

- si A et B sont 2 evnts indépend alors $p(A/B) = p(A)$ $p(B/A) = p(B)$ D'où $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

- Evnmt contraire

$p(\bar{A}/B) = 1 - p(A/B)$ $p(A \cap \bar{B}) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})}$

$p(\bar{B}/A) = 1 - p(B/A)$ $p(B \cap \bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(\bar{A})}$

- soit 3 evnt A, B et C si ces evnt sont disjoint deux à deux alors

$$p(B \cup C / A) = p(B/A) + p(C/A)$$

$$= \frac{p((B \cup C) \cap A)}{p(A)}$$

$$= \frac{p((A \cap B) \cup (A \cap C))}{p(A)}$$

$$= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} + \frac{p(A \cap C)}{p(A)}$$

$$= p(B/A) + p(C/A)$$

exemple : soit 2 évts A et B tel que

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(\bar{A}/B)$, $P(\bar{B}/A)$, $P(\bar{A}, \bar{B})$

* $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/3} = 3/4$
* $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = \frac{1}{4}$
* $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$
* $P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$
* $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{5/12}{2/3} = \frac{5}{2}$

exemple : soit 2 evt A et B on donne :

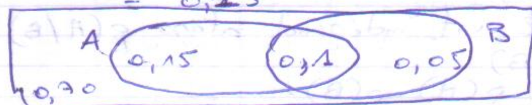
$P(A \cap B) = 0,1$; $P(A \cap \bar{B}) = 0,15$

$P(\bar{A} \cap B) = 0,05$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7$

Calculer $P(B)$; $P(B/A)$

que peut-on conclure ?

$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$
$= 0,10 + 0,05$
$= 0,15$



$P(A) = 0,15 + 0,1 = 0,25$

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$

$P(B) \neq P(B/A)$

les evnt A et B sont dépendants

exemple : A, B et C 3 evnt

$P(A) = 0,2$ $P(B) = 0,3$

$P(C) = 0,4$ $P(B/C) = \frac{1}{3}$

Calculer : $P(B \cap C)$; $P(C/\bar{B})$

$P(C/B)$; $P(\bar{C}/B)$

* $p(B \cap C) = p(C) \cdot p(B/C) = \frac{2}{15}$
* $p(C/B) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = \frac{2/15}{3/10} = \frac{4}{9}$
* $p(C/\bar{B}) = \frac{p(C \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(C) \cdot p(\bar{B}/C)}{1 - p(B)}$

$$= \frac{4/10 \cdot 2/3}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{8}{21}$$

* $p(\bar{C}/B) = 1 - p(C/B) = \frac{5}{9}$

Théorème : si A et B sont 2 evnt indép Alors :
- A et $\bar{B}$ le sont aussi
- $\bar{A}$ et B " "
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ " "

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$
$$= p(A) - p(A) \cdot p(B)$$
$$= p(A)\,[1 - p(B)]$$
$$= p(A) \cdot p(\bar{B})$$

3 - Formul des prob totales :

soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un système d'evnt complets.

B un evnt quelconque

un sys d'evnt Complet : $\begin{cases} \cup A_i = \Omega \\ A_i \cap A_j = \phi \text{ si } i \neq j \end{cases}$

$$p(B) = p(B \cap \Omega)$$
$$= p(B \cap (A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n))$$
$$= p((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \ldots \cup (B \cap A_n))$$
$$= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) \ldots + p(B \cap A_n)$$
$$= p(B/A_1) \cdot p(A_1) + p(B/A_2) \cdot p(A_2) + \ldots + p(B/A_n) \cdot p(A_n)$$

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)}$$

Autre démonstration :

$$p(B) = p(B \cap \Omega) = p(B \cap (\cup A_i)) = p(\cup (B \cap A_i))$$
$$= \sum p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)$$

4- Théorème de multiplication :

soit 2 évnt A_1 et A_2

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$

soient n évnt $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1})$$

ex : un lot contient 15 chemises dont 4 défectueuses. tire au hasard 3 chemises, l'une après l'autre (tirages sans remise)

- Calculer la prob pr que les 3 chemises ne peut ps défectué
- m̂ qestn si les tirages avec remise

. $P(A_1)$: prob que les chemise ne soit pas défectueuse

$$P(A_1) = \frac{11}{15}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{10}{14}$$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{9}{13}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13}$$

si les évnt sont indépnt (tirage avec remise)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{11}{15} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{11}{15}$$

Théorème de multiplication : cas de l'indépendance des évnts :
si $A_1, A_2 \ldots A_n$ n évnt indépts alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ex : On tire 3 carts dans un jeu de 52 (tirage sans remise)

Quelle est la prob d'obtenir 3 dames ?

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_1) \, P(D_2 | D_1) \cdot P(D_3 | D_1 \cap D_2)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50}$$

$$= \frac{1}{5525}$$

5 - Théorème de Bayes

soit $(\Omega, \mathcal{E}, p)$ un espace de prob et

$B, A_1 \dots A_n$ (n+1) evts

$(A_i)_{i=1}^{n}$ un système d'evnt

B un système d'evnt = q. q

on connait $\begin{cases} P(A_i) \\ P(B_j/A_i) \end{cases}$

on cherche $p(A_i/B_j)$

$$p(A_i/B_j) = \frac{P(A_i) \cdot p(B_j/A_i)}{p(B_j)}$$

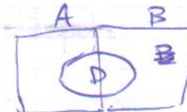
$$\boxed{p(A_i/B_i) = \frac{P(A_i) \cdot p(B_j/A_i)}{\sum p(A_i)\, p(B_j/A_i)}}$$

ex : Dans une e^se^, une machine A fabrique 40% de pièces, B fabrique 60%, les pièces défectueuse fabriquée par A sont de 3%, Celles de B sont de 2%.

on choisi une pièce au hasard

a - calculer la prob. que la pièces soit Défect

b - sachant qu'elle est défec calculer la prob qu'elle soit fabriquée par A



$p(A) = 0,4 \qquad p(B) = 0,6$

$p(D/A) = 0,03 \qquad p(D/B)\ 0,06$

a. $p(D) = p(D \cap (A \cap B))$

$= p(D \cap A) + p(D \cap B)$

$= p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) = 0,024$

on a une prob de 3,4 % de pièces défectueuse.

b. $p(A/D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A) \cdot p(D/A)}{P(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B)}$

=

ex. On utilise un test pour déceler une maladie

Ce test n'est pas parfait il donne une réaction positive

dont 95 % dans ces cas lorsque l'individu est malade à 5 % s'il ne l'est pas. proportion des gens malades à 3/5 dans une région

a. Calculer la prob que le test réagit positivement (A)

b. " " " qu'1 personne soit malade tant que le test réagit positif

H_1 : personne est malade $P(H_1) = \frac{3}{5}$

H_2 : personne n'est pas malade $P(H_2) = \frac{2}{5}$

A : Test réagit positivement

$P(A/H_1) = 0,95$

$P(A/H_2) = 0,05$

$P(A) = P(A \cap (H_1 \cup H_2))$

$= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2)$

$= P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2)$

$= 0,6 \times 0,95 + 0,4 \times 0,05$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = 0,966$$

Chap 4 : Variables aléatoire discrets

1- Epreuve aléatoire :
c'est une epreuve dont le resultat est aléatoire.
Ex: - jet d'1 dé
- jet d'1 pièce de monnaie
le resultat exacte n'est pas connu à l'avance.

2- variable aléatoire : (v.a)
c'est le resultat caracteristique d'une epreuve aléatoire, ce resultat peut être representé par un nb.
ex: le jet d'1 pièce ptetre codifié.
$X = 0$ c'est le resultat Pile
$X = 1$ " face

Notation : X est la v.a
x_i les valeurs qu'elle peut prendre
Soit X la v.a "jet d'1 pièce"
X prend les valeurs 0 ou 1

ex: soit un jeu entre 2 joueurs (Ali et Karim)
on lance un dé, si 1 ou 6 apparait Karim perd 1
si 2, 3, 5 apparait Karim gagne 2 DH
si 4 apparait la partie est declarée nulle
calculer la prob que Karim gagne.
* la prob de gagner 2 DH $P(X=2) = P\{(2,3,5)\} = \frac{3}{6}$
* la prob de perdre 1 DH $P(X=-1) = P\{(1,6)\} = \frac{1}{3}$
Prob que la partie est declarée nulle :
$P(X=0) = P\{(4)\} = \frac{1}{6}$
X la va que perdra X.
la x_i -1, 0, 2
$P(X=2) = \frac{1}{2}$ $P(X=0) = 1/6$
$P(X=-1) = 1/3$ Ns avons associé des prob aux valeurs prises par X.

Cette correspondance s'appelle loi de prob
la loi de prob est général présentée à l'aide
d'un tableau

Val X	-1	0	2	ΣP
P(X=k)	1/3	1/6	1/2	1

3 – loi de prob :

On appelle loi de prob d'1 v.a X la relation qui permet de déterminer la prob de la réalisation de chaque nombre associé aux résultat possible.

ex : lors d'1 enquête on a interrogé 5 hommes et 3 femmes, on choisit au hasard et sans remise les personnes une à une jusqu'à obtention d'1 homme

Soit X le nb de tirages nécessaires

* Déterminer les valeurs de X
* Déterminer la loi de prob

le nb de tirage min est 1
le nb — — max est 4

$X \to \{1, 2, 3, 4\}$

$P(X=1) = 5/8$; $P(X=2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$
$P(X=3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$, $P(X=4) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5}$

Val k de X	1	2	3	4	Σ
P(X=k)	35/56	15/56	5/56	1/56	1

ex : On lance successivement 2 fois une pièce de monnaie on définit la v.a par le nb de façon obtenus en 2 jets.

Déterminer la loi de prob

$\Omega = \{(FF), (P.P), (FP), (PF)\}$

X peut prendre 0, 1, 2

$P(X=0) = 1/4$ $P(X=1) = \frac{1}{2}$ $P(X=2) = 1/4$

X	0	1	2	
P(X=k)	1/4	1/2	1/4	1

4- Fonction de répartition :

Revenons à l'ex introductif :

la loi de prob est donnée par le tableau suivant :

valeur de x	-1	0	2	ε p
P(x = k)	1/3	1/6	1/2	1

Calculons la prob que $(x \le x)$

$P(x \le 1) = \frac{1}{3}$

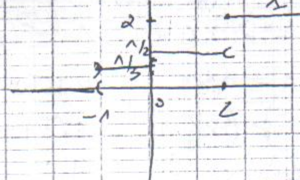
$P(x \le 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$P(x \le 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$

on remarque que

$P(x < -1) = 0$

$P(x \le k) = 1$ si $k \geq 2$



$P(x \le -1) = 1/3$ $P(x < 0) = \frac{1}{3}$

$P(x \le 0) = \frac{1}{2}$ $P(x < 2) = \frac{1}{2}$

Déf : la fct de rép est définie par :

$F(x) = P(X \le x)$

val x	-1	0	2
P(x =)	1/3	1/6	1/2
F(x) = P(x≤)	1/3	1/2	1

la représentation graphique de la fonction de répartition est une fct en escalier appelée courbe cumulative

* Propriété de la fct de répartition : F(x)

  * $0 \le F(x_i) \le 1$
  * $F(x_i)$ est une fonction croissante
    si $x_2 > x_1$ alors $F(x_2) > F(x_1)$

* x_1 étant la plus petite valeur, on a pour tout $x < x_1$

$$F(x) = P(X \leq x) = 0$$

* x_n étant la plus grande valeur, on a pour tout

$x > x_n$ $\quad F(x) = P(X \leq x) = 1$

* $P(a < X \leq b) = 1 - P(\overline{a < X \leq b})$

$$= 1 - [P(X > b) + P(X \leq a)]$$

$$= 1 - [1 - P(X \leq b) + P(X \leq a)]$$

$$= P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

ex : Soit X une v.a définie par le tab suiv :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	ΣP
P_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05	0	1
$F(x)$	0,1	0,25	0,45	0,7	0,85	0,95	1	1	

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4)$$

$$= 1 - 0,85 = 0,15$$

$$P(X < 2) = P(X \leq 1) = F(1)$$

$$P(2 < X \leq 6) = F(6) - F(2)$$

$$= 1 - 0,45 = 0,55$$

5. Espérance mathématique et variance :

1- Espérance mathématique :

Rappel : Moyenne arithmétique

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \Sigma n_i x_i$$

$$\bar{x} = f_i x_i$$

Espérance math : c'est la moyenne arithmétique d'une distribution de prob, notée $E(X)$

$$E(X) = \Sigma x_i p_i$$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

V de X	-1	0	2
$P(X=k)$	1/3	1/6	1/2

$$E(X) = \left(-1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(0 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} + 1 = 2/3$$

Propriétés de l'espérance mathématique :

$$E(X + \alpha) = \sum (x_i + \alpha) p_i$$
$$= \sum x_i p_i + \sum \alpha p_i$$
$$= E(X) + \alpha \sum p_i$$

$$E(X+\alpha) = E(X) + \alpha$$

- De même $E(X - \alpha) = E(X) - \alpha$

- $E(kX) = \sum (k x_i p_i) = k \sum x_i p_i$

$$E(kX) = k\,E(X)$$

- $E\left(\frac{X-m}{6}\right)$ avec $E(X) = m$

$$E\left(\frac{X-m}{6}\right) = \frac{1}{6} E(X - m)$$
$$= \frac{1}{6}\left[E(X) - m\right] = 0$$

+ $Z = (X + Y)$
$$E(Z) = E(X) + E(Y)$$

+ $Z' = (X - Y)$
$$E(Z') = E(X) - E(Y)$$

ex : $E(X+4) = E(X) + 4$

$E(4X) = 4\,E(X)$

$E\left(\frac{X}{4}\right) = \frac{1}{4} E(X)$

5-2 Variance :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω, avec $E(X) = m$ l'espérance mathématique.

On appelle variance de X (notée $V(X)$ ou $\sigma^2(X)$)

l'espérance mathématique de la variance $(X - E(X))^2$

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

$$= E(X^2 - 2X\,E(X) + E^2(X))$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X)$$

$$= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

On le note descriptive :

$$V(X) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

ex : Soit X une v.a.d. défini à l'aide du Tableau suivant

x_i	0	1	2	3
p_i	p_1	0,5	0,3	p_4

a - On suppose que les événements $(X=0)$ et $(X=3)$ sont équiprobables, Déterminer p_1 et p_4

b - Calculer $F(x)$

c - Calculer $E(X)$ et $V(X)$

d - Calculer $E(6X)$; $V(6X)$

On a $p_1 + 0,5 + 0,3 + p_4 = 1$

$$p_1 + p_4 = 0,2$$

donc p_1 et p_4 équiprobables

$$p_1 = p_4 = 0,1$$

x_i	0	1	2	3	ΣP
p_i	0,1	0,5	0,3	0,1	1
$F(x)$	0,1	0,6	0,9	1	

c - $E(X) = 0\times0,1 + 1.0,5 + 2.0,3 + 3.0,1$

$$= 1,4$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = (0^2\times0,1) + (1^2\times0,5) + (2^2\times0,3) + (3^2\times0,1) = 2,6$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= 2,6 - (1,4)^2 = 0,64$$

$$E(6X) = 6E(X) = 6\times1,4 = 8,4$$

32

$V(6X) = 6^2 V(X) = 36 \times$
$= 23{,}04$

Propriétés de la variance :

$V(X+\alpha) = V(X)$

$V(X) = E(X - E(X))^2$

$V(X+\alpha) = E((X+\alpha) - E(X+\alpha))^2$
$= E(X + \alpha - E(X) - \alpha)^2$
$= E(X - E(X))^2$
$= V(X)$

De même $V(X-\alpha) = V(X)$

$V(kX) = E(kX - E(kX))^2$
$= E(kX - kE(X))^2$
$= E(k(X - E(X)))^2$
$= k^2 E(X - E(X))^2$
$= k^2 V(X)$

$V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X-m)$
$= \frac{V(X)}{\sigma^2}$

si $V(X) = \sigma^2$ alors $V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = 1$

Rq : la v.a $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma}$ est appelée v.a centrée et réduite

$E(Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma}\right) = 0$

$V(Y) = \frac{1}{\sigma^2} V(X - E(X)) = \frac{V(X)}{\sigma^2}$
$= 1$

Soit $Z = X + Y$

$V(Z) = V(X+Y)$
$= V(X) + V(Y) + Cov(X,Y)$

$V(X+Y) = E((X+Y) - E(X+Y))^2$
$= E((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2$
$= E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2$
$+ 2E(X - E(X))(Y - E(Y))$
$= V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$

De même $Z' = X - Y$

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,Cov(X,Y)$$

si X et Y sont indépendant alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$$

Écart-type :

l'écart type d'1 v.a X est la racine carré de sa variance $\sigma = \sqrt{V(X)}$

5_3 Moment d'ordre k

* Moment simple d'ordre k

$$m_k = E(X^k)$$

si $k = 1$, on retrouve $E(X)$

* Moment centrés d'ordre k

$$m'_k = E(X - E(X))^k$$

si $k = 2$ c'est la variance

6. Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff : IBT

Soit X une v.a discrète, t un réel positif quelconque, on cherche la prob pour que la valeur de X soit hors de l'intervalle $[E(X) - t \,;\, E(X) + t]$

l'IBT nous donne :

$$P(|X - E(X)| > t) < \frac{V(X)}{t^2}$$

ou encore :

$$P(|X - E(X)| < t) > 1 - \frac{V(X)}{t^2}$$

si on pose $t = u\sigma$

on aura

$$P(|X - E(X)|) < \frac{1}{u^2}$$

théorème :

Soit X une v.a avec $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma$

Pour toute constante u, on a :

$$P(|X - E(X)| > u\sigma) < \frac{1}{u^2}$$

34

ex : On considère une v.a discrète avec $E(x) = 7$; $V = 2$
Déterminer une borne sup de la prob
$|x - 7| > 5$

on sait que $P(|x - E(x)| > t) < \frac{V(x)}{t^2}$

$P(|x - 7| > 5) < \frac{V(x)}{5^2}$

$P(|x - 7| > 5) < \frac{2^2}{5^2} = 0,16$

$P(|x - 7| > 5) < 0,16$

Il y a au plus 16 % de chance que l'écart entre x et et $E(x)$ soit > 5

Chap 5 : Des lois de prob discrètes :

Une loi de prob. est définie par la suite des couples $(x_i ; y_i)$ avec x_i les résultat possibles et les p_i les prob corpo... à condition que la somme des pro est égale à 1

ex : on jette une pièce de 1 DH
la loi de prob est :

x_i	0	1	ΣP
P_i	1/2	1/2	1

Certaines loi de proba sont d'utilisation assez courante, on peut citer : la loi de Bernoulli.
- " " Binomiale.
- " Poisson.
- " " hypergéométrique.
- " " géométrique.

Chapitre 5 : lois de probabilité discrète

certaines lois de prob. sont d'utilisation assez courant dans la pratique en particulier
+ la loi de Bernoulli : succès, échec
la loi de Binomiale : généralisation de la loi de Bernoulli
+ la loi poisson : c'est un cas particulier de la loi Bi
si $n \to \infty$ et $p \to 0$
la loi hypergéométrique $H(N, n, p)$ permet de traiter les tirages par remises.

loi géométrique E à la $k^{ème}$ E preuve réalisation d'un EVT

I la loi Bernoullé "loi indicatrice"

1.1 Déf :

une variable de Bernoullé notée $E(p)$ admet pour valeur possible 0 et 1 avec respectivement les prob q et p

Valeur de x	0	1	Σ P
P(x = 2)	q = 1 − p	p	1

$f(x) = p^2(1-p)$

si $x = 0$ $f(x) = (1-p)$

si $x = 1$ $f(x) = p$

x_i	0	1
p_i	$q = 1-p$	p

Notation $X \sim B(p)$

1 - 2 - paramètres

Expérance mathématique :

$E(X) = \Sigma x_i p_i$

$= (0 \times q) + (1 \times p)$

$E(X) = p$

Déf : si la v.a x soite ℓ loi de Bernoullé du paramètre alors l'expérance math est égal à p.

$X \sim B(p)$

$E(X) = p$

Rq : $X \sim B(p)$

$E(X) = (0 \times q) + (1 \times p) = p$

$E(X^2) = (0^2 \times q) + (1^2 \times p) = p$

$E(X^k) = (0^k \times q) + (1^k \times p) = p$

D'où si $X \sim B(p)$ alors :

$E(X) = E(X^2) = \dots = E(X^k)$

$= p$

variance :

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$E(X^2) = p \quad E(X) = p$

$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$

Déf : si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, d'esp math $E(X) = p$ alors la variance est pq

si $X \sim B(p)$

$E(X) = p$

$V(X) = pq$

l'écart type :

$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{p \times q}$

Ex : on lance une pièce de M^e on s'intéresse à la face supérieur

x_i	0	1	Σ p
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X) = p = \frac{1}{2} \quad V(X) = pq = \frac{1}{4}$

$E(X^5) = \frac{1}{2} \quad E(X^k) = \frac{1}{2}$

Ex : soit X → V.a qui suit une loi de Bernoulli

Montrer que l'écart-type de X est tjs ≤ à $\frac{1}{2}$

$E(X) = p$

$V(X) = pq$

$\sigma(x) = \sqrt{pq}$

l'écart type est max si la variance est max

soit f la fonction suivante

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \longrightarrow p(1-p)$

on peut calculer la ~~notion~~ maximum de f

[illegible] dérivé premier null

dérivé seconde négative

$f = p(1-p) = p - p^2$

$f' = 1 - 2p$

$f' = 0$ si $\boxed{p = \frac{1}{2}}$

$f'' = -2 < 0$

max $p = \frac{1}{2}$

II la loi Binomiale B(n,p) :

la loi Binomiale intervient chaque fois que l'on fait appelle a 2 alternatives mutuellement exclusive dont les prob restent const d'1 épreuve a l'autre

une suite binominial est une suite de n épreuves satisfaisant les conditions suivantes :

- le nbres des épreuves on est fixé à l'avance
- toute les épreuves ~~sont~~ édentique
- La prob d'obtenir le succès s est p est constante d'1 épreuve a l'autre

ex : Une étude statist a noté que la naissance, un bébé a une prob de 0,52 d'être un garçon

Determiner la probabilité

épreuve binomiale : Naissance d'un bébé

succès : S avoir une fille

échec : $\bar{S}$ avoir un garçon

$p = (p(S)) = 0,48$ $p(\bar{S}) = 0,52$

$q = 0,52$

on a une suite binomial de 5 épreuve

x la v.a " nbr de filles obtenues "

on cherche la prob de $(x = 2)$

$S \bar{S} \bar{S} S \bar{S}$, $SS\bar{S}\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}\bar{S}SS$

$p(S\bar{S}\bar{S}S\bar{S}) = p(S) \times p(\bar{S}) \times p(\bar{S}) \times p(S) \times p(\bar{S})$

$= p^2 . q^3$

$p(\bar{S}\bar{S}\bar{S}SS) = p(\bar{S}) \times p(\bar{S}) \times p(\bar{S}) \times p(S) \times p(S)$

$= q^3 . p^2$

Cette prob est la même

on doit fair compte du nbr de suites de 5 élément complet

2 ~~suites~~ succès et 3 échec

$p(x = 2) = p^2 q^3 C_5^2$

Généralisation : Soit une épreuve binomiale formé de n épreuve.

soit x le v.a "nb de succès en n épreuves"

calculer $p(x = k)$

k succès

n-k échecs

les épreuves binomiale sont ident $p(SS\bar{S} \ldots S) = p^k . q^{n-k}$

. $p(x = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$

Déf soit une suite binomiale de n épreuves prob du succè p

prob du échec q

soit x . le v.a donnant le nbr de succès de n éprves

sa loi de prob est ~~calcule~~ appelés loi binomiale

elle est définie par $p(X = k) = C_n^k \, p^k . q^{n-k}$

Les deux nbres n et p sont appelés les paramétres de la loi Binimial on note $X \sim B(n, p)$

Déf : une variable est une sommes de n. v. a indépendants suivant chacune une loi de Bernoulli

$B(\ ) = B_1(p) + B_2(p) + \dots + B_n(p)$

ex : une Urne contient 3 boules. 2 Blanches et 1 Noire on effectue deux tirages en ucessifs indépendants (tirage avec remise).

Soit X la v.a "nbr de boules blanche obtenues"

Déterminer la loi de prob.

X : v.a nbr de boules blanche obtenus, succé. : avoir un boules blanche $p = \frac{2}{3}$

echec : avoir une boule noir $q = \frac{1}{3}$

nb d'epreuve $n = 2$

D'ou $X \sim B(2, 2/3)$

les vls prise par X : 0, 1, 2 $p(X=0) = C_2^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$p(X=1) = C_2^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$

$p(X=2) = C_2^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{4}{9}$

k	0	1	2	Σp
$p(x=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

ex : $X \sim B(n, p)$

$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Montrer que $\Sigma (p(x=k)) = 1$

Rappel : le dévlopt du binome de nwtn sont donné

$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \dots + C_n^n p^n q^0$

$X \sim B(n, p)$

$(q+p)^n = p(X=0) + p(X=1) + \dots + p(X=n)$

=

les paramètre d'1 loi binomiale :

on sait que : $B(n,p) = B_1(p) + B_2(p) + \dots + B_n(p)$

$E(x) = E\left((B_1(p) + \dots + B_n(p)\right)$

$= E(B_1(p)) + \dots + E(B_n(p))$

$= \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ fois}}$

$E(x) = n.p$

Déf : si X suit une loi Binomial de paramètre.

Variance : $V(X) = V\left(B_1(p) + \dots + B_n(p)\right)$

$= V\left(\sum B_i(p)\right)$

$= \sum V(B_i(p))$

$V(\quad) =$

Déf : si $X \sim B(n,p)$

alors $V(x) = n.p.q.$

$\sigma(x) = \sqrt{npq}$

ex : $X \sim B(2, 2/3)$

$E(x) = \frac{4}{3}$

$V(x) = 2 \times \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

III Lois de poisson :

Déf : lorsque le nbr d'épreuve est grand ($n \to +\infty$) et la prob du succès $\to 0$ ($p \to 0$)

on démontre que la loi binomiale tend vers la forme limite : $P(X = k) = \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}$

que l'on appelle loi de poisson.

soit $n.p = \lambda$

$$p(x=k) = \frac{\lambda^k (e^{-\lambda})}{k!}$$

- la loi de poisson est appliqué lorsque :
  les condition d'applicat° de la loi binomiale sont réunies
- La prob de succès est très faible ($p \to 0$)
- Le nbre d'epreuves est grand ($n \to \infty$)

Notation : $X \sim P(\lambda)$.

Déf : $X \sim$ loi de poisson de paramètre λ, si pour tout entier la loi on a : $p(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

ex : x suit → loi de poisson de paramètre 4.

$$p(x=k) = \frac{e^{-4}\, 4^k}{k!}$$

$p(x=0) = 0,018$

$p(x=2) = 0,147$

$p(x=5) = 0,156$

$p(x<5) = 0,629$

$x \sim p(5)$

$p(x<6) = 0,916$

Caractéristique de la loi

+ $\sum p(x=k) = 1$
+ Esperence mathématique :
  $X \sim p(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$
+ Variance :
  $X \sim p(\lambda)$ alors $V(X) = \lambda$
+ Ecart-type :
  $\sigma(x) = \sqrt{\lambda}$

Approximation de la loi Binomial par la loi de poisson

la loi de poisson de paramaitre λ, est la limite de la loi binomiale de paramaitre n et p.

Dans la pratique, la loi binomiale peut être approximée par la loi de poisson lorsque

$n \geq 50$; $p \leq 0,1$; $np \leq 5$

exercice : Une machine produit en moyenne 1% de pieces défectueuses on considère une commande de 300 pièce

soit la X la v.a. "nbre de pièce défect"

a) déterminer la loi de prob

b) Approximer cette loi

c) Calculer la prob des evts :

- aucune pièce n'est défects
- moins de 4 pièces défec

Réponse a) X v.a "nb de pièce déf"

$p(S) = p = 0,01$

$q = 0,99$

$n = 300$

$X \sim B(300, 0,01)$

b) Condition d'approximation :

$n \geq 50$ $p \leq 0,1$ $n\,p = 3 \leq 5$

=> les condition sont réunis

$B(300, 0,01) \sim P(3)$

c) $P(X=0) = 0,05$

$P(X<4) = 0,647$

IV La loi Hypergéométique:

exemple Introductif

Un sac contient 8 Boules blanches et 2 boules noir on tire sans remise (tirage exestive) 3 de ces boules. soit X la v. a "nbr de boule noires tirées a l'occasion d'1 tirage de 3 boules"

Déterminer la loi de prob de X.

Succés = avoir une boule noir $p = \frac{2}{10}$

les valeurs que peut prendre X 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$$

x_i	0	1	2	
p_i	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$X \sim H(N, n, p)$

$\sim H(10, 3, \frac{2}{10})$

$$P(X=k) = \frac{C_{Np}^{k} C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$$

$N_p + N_q = N$

Généralisation:

soit une serie de n tirages sans remise dans un sac contenant une propotion p des boules blanches et une propotion $(1-p)$ de bls noires. soit X la v. à "nb de boules blanches obtenues"

$$P(X=k) = \frac{C_{Np}^{k} C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$$

Notation: $X \sim H(N, n, p)$

N : effectif de la population

n : nbr de tirages

p : probabilité du succés

la loie hypergéométrique est appliquée lorsque :

* on a 2 resultat possible succés - Echec "dichotomie"
* les réalisation de cette épreuve ne sont pas indépts
* Tirages sans remise

Espérence mathématique :

soit X une v. a qui suit un loi hypergéométrique de paramétres N, n et p l'espérence mathématique est

$$E(x) = np$$

Variance :

$X \sim H(N, n, p)$ la variance de x est donnée par

$$V(x) = \frac{N-n}{N-1} npq$$

$\frac{N-n}{N-1}$ est appelé facteur d'exhaustivité

Convergence :

si $N \to \infty$; n et p sont fixes alors la loi hyperg

$H(N, n, p) \sim B(n, p)$

$$\frac{C_{Np}^{k} C_{Nq}^{n-k}}{C_{N}^{n}} \sim C_{n}^{k} p^{k} q^{n-k}$$

Dans la pratique la proximation de la loi hypergéo par la loi Binomiale est accepté si $\frac{n}{N} < 0,1$

exercice:

Dans une entreprises, on a 6 ouvrier et 5 cadres le DRH souhaite prendre l'avis de son personnel interoge 4 personnes choisies au hasard parmi les 11 personnes

soit X la v.a : "nbre d'ouvrier interogés"

a - les valeurs prise par X

b - la loi de prob

c - $p(X \geq 4)$

11 < 6 ouvrier, 5 cadres

$p = \frac{6}{11}$ $N = 11$ $n = 7$

$X \sim H(11; 7; \frac{6}{11})$

a) les valeurs prise par X : 2, 3, 4, 5, 6

$p(X=2) = \frac{C_6^2 C_5^5}{C_{11}^7} = \frac{15}{330}$

$p(X=3) = \frac{C_6^3 C_5^4}{C_{11}^7} = \frac{100}{330}$

$p(X=4) = \frac{C_6^4 C_5^3}{C_{11}^7} = \frac{150}{330}$

$p(X=5) = \frac{C_6^5 C_5^2}{C_{11}^7} = \frac{60}{330}$

$p(X=6) = \frac{C_6^6 C_5^1}{C_{11}^7} = \frac{5}{330}$

b)

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{15}{330}$	$\frac{100}{330}$	$\frac{150}{330}$	$\frac{60}{330}$	$\frac{5}{330}$

c). $p(X \geq 4) = \frac{150 + 60 + 5}{330} = \frac{215}{330}$

$1 - p(X < 4) = 1 - \frac{115}{330} = \frac{215}{330}$

V La loi géométique :

soit un event E de prob. p. soit X la v.a "nbre d'épreuves nécessaire à l'apparition de E"

ex : nbr de naissances nécessaire pour avoir fille

$p(X=k)$ la prob de l'evnt E se réalise pour la 1ème fois au $k^{ème}$ épreuves (les $k-1$ épreuves précédent, n'a que des échecs)

les épreuves étant indépendant

$$p(x=k) = q^{k-1} \cdot p$$

$p(x=0) = 0$

$p(x=1) = p$

$p(x=2) = pq$

$p(x=3) = q^2 p$

$p(x=k) = q^{k-1} \cdot p$

les prob seccessives $p(x=1)$; $p(x=2)$ ... $p(x=k)$ forment une progression géométique de 1ème terme et de raison q d'où l'appelation de la loi : loi géométique

Esperence mathématique :

Si x suit une loi géométique de paramaitre p alors l'espérence mathématique : est $E(x) = \frac{1}{p}$

Variance :

Si X suit une loi géométique de paramaitre p alors la variance est $V(x) = \frac{q}{p^2}$

Ex : on veut ouvrir la porte par une clé parmi 4.
On suppose qu'on prend la clé par hasard

1- Aprés de combien d'essais peut-on espérer ouvrir la porte

2- Déterminer $E(x)$ et $V(x)$.

3- Calculer $p(x \geq 4)$

x "nbr d'essais pr ouvrire la porte"

$p = \frac{1}{4}$ $q = \frac{3}{4}$ $p(x=1) = p = \frac{1}{4} = 0,25$

$p(X=2) = pq = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 0,1875$

$p(x=3) = q^2 p = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = 0,1406$

$p(x=4) = q^3 p = 0,1055$

$p(x=5) = q^4 p = 0,0791$

2)- $E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/4} = 4$ tentative

$V(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{3/4}{(1/4)^2} = 12$

3)- $p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4) = 0,3164$

<u>exercice</u> Approximation $B(n,p) \sim p(\lambda)$

$X \sim B(100 ; 0,03)$

a. Donner une approximation

b. Calculer $p(x = 10)$

c. $E(x)$, $V(x)$

<u>réponses</u> :

a. les condition d'approximation $n \geq 50$ $p \leq 0,1$ $np \leq 5$

$np = 3$

$B(100, 0,03) \sim p(\lambda)$

b. $p(x = 10) = \frac{e^{-3} 3^{10}}{10!} = 0,001$

c. $E(x) = 3$ $V(x) = 3$

Ex : Approximation $B(x,p) \sim P(\lambda)$

$X \sim B(100, 0{,}03)$

a_ Donner une approximation

b_ Calculer $P(X=10)$

c_ $E(X)$. $V(X)$

⇒ a/ les conditions d'approximation

$n \geq 50$ $p \leq 0{,}1$ $np \leq 5$

$np = 3$ $B(100, 0{,}03) \sim P(\lambda)$

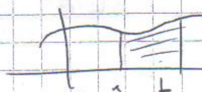
b/ $P(X=10) = \frac{e^{-3} \cdot 3^{10}}{10!} = 0{,}001$

c/ $E(X) = 3$ $V(X) = 3$

Chapitre 6 : Variables aléatoires continues :

Dans le cas d'1 v.a continue on fait appel à la densité de prob et la fct de répart°

$F(x) = P(X \leq x)$ F permet le calcul de la prob sur intervall $[a,b$



$P(a \leq x \leq b) \int_b^a f(x)\,dx$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

1_ Définition d'1 v.a continue :

1/ Densité de proba : une fct est définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle $[a,b]$ et dite densité de prob si :

a_ $f(t) \geq 0$ pour tt réel t

b_ f est définie sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

c_ Il existe une fct de répartition F , $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

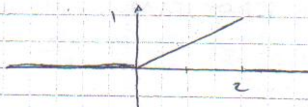
2/ Fonction de répartition : X suit une v.a continu si il existe une fct de rép. $F(x)$ / $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

ex : Soit X une v.a continu ayant la fct de D° suiv :

$$f(x) \begin{cases} = \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ = 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- Représenter graph. f
- Montrer que f est une densité
- Déterminer F(x)
- Représenter graph F(x)

a/



b/ $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ $\int_0^2 \frac{1}{2} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}[2-0] = 1$

c/ $F(x) = 0$ si $x < 0$

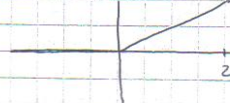
$F(x) = \frac{1}{4}x^2$ si $0 \leq x \leq 2$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} t\,dt =$

$\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{4}x^2$ si

si $x > 2$ $F(x) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt = 1$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4\, x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



ex : $f(x) \begin{cases} = k x e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si non} \end{cases}$

Déterminer k pr que f puisse être considérée comme une densité de p

$\int_0^{\infty} k x e^{-x}\,dx = 1$ $u = x$

$k\int_0^{\infty} x^{-x}\,dx = 1$ $\int x e^{-x}\,dx = \begin{cases} v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \\ u = x & u' = 1 \end{cases}$

$k \int x e^{-x}\,dx = 1$

$\int u v' = [uv] - \int u'v$

$= \left(x(-e^{-x})\right)_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x}$

$= \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$

$\boxed{k = 1}$

$k \cdot 1 = 1$

f

ex : $f(x) = -\frac{1}{18}x + k$ si $-1 \leq x \leq 2$

$= 0$ si non

- Déterminer k pour que f soit une densité de prob
- Déterminer $F(x)$

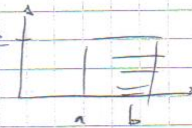
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1$ $k = 13/36$

si $-1 \leq x \leq 2$ $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -1 \\ \frac{-x^2}{36} + \frac{13x}{36} + \frac{7}{18} \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

II - La loi uniforme :

Déf : Une v.a X est distribuée suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ notée $U_{[a,b]}$ si $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$

$= 0$ si non



$\int_a^b f(x)\,dx = 1$ c.a.d $(b-a)c = 1$

$c = \frac{1}{b-a}$

$f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$

$= 0$ si non

a - f est une densité $\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$

b - Fct de rép.

si $x \leq 0$ $F(x) = 0$

si $0 \leq x \leq 1$ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = [t]_0^x = x$

si $x > 1$ $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

c - $P(1/4 \leq x \leq 1/2) = F(1/2) - F(1/4) = 1/2 - 1/4 = 1/4$

ex : Soit une v.a continue dont la fct de rép F est :

$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{3}{4}x \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x^2}{4} + x + 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 3/4 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x/2 + 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

3/ Paramètres d'1 v.a continu :

1- Espérance mathématique :

Déf. soit X une v.a continu de densité de prob f, l'espérance math $E(X)$ est définie : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

si $E(X) = 0$ la v.a est dite centrée si la v.a est définie sur (a,b)

Alors $E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$

ex : $f(x) = 3/8\, x^2$ si $0 < x < 2$

$= 0$ si non

$E(X) = \int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^2 3/8\, x^3\,dx = 3/8 \int_0^2 x^3\,dx = 3/8 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 3/2$

ex : Calculer $E(X)$ si $X \sim U_{[0,1]}$ $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$

$E(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0$ si non

$= 1/2$

Déf : si $X \sim U_{[a,b]}$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$

$E(X) = \int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^2 1/2\, x^2\,dx = 1/2 \int_0^2 x^2\,dx = 1/2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 1/2 \left[8/3\right]$

$= 8/6 = 4/3$

ex : $X \sim U_{[a,b]}$

Mq $E(X) = \frac{a+b}{2}$

$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$

$= \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{1}{2(b-a)} (a+b)(b-a) = \frac{a+b}{2}$

ex : $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$

$= 0$ si non

$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx = \ldots = 1$

Soit X une va continue, de densité de prob f et d'espérance math $E(X)$ la variance $V(X)$ ou (σ^2) est définie par :

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx$

- si la variance est égale à 1 on dit la va est réduite

$V(kX) = k^2 V(X)$

ex : X suit une loi uniforme sur [0,1], Calculer V(x)

$V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1/3$

$V(x) = 1/3 - (1/2)^2 = 1/12$

ex : $f(x) = 3/8\, x^2$ si $0 < x < 2$

$= 0$ si non

$V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = \int_0^2 3/8\, x^4 dx = 3/8 \int_0^2 x^4 dx = 3/8 \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 12/5$

$V(x) = 12/5 - (3/2)^2 = 3/20$

Ecart-type : $\sigma = \sqrt{V(x)}$

ex : $f(x) = k x^2$ si $0 < x < 2$

$= 0$ si non

a- Determiner k

b- Determiner la fct et de rép

$\int_0^2 k x^2 dx = k \int_0^2 x^2 dx = k \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = k [8/3] = 1$

D'où $k = 3/8$ $f(x) = 3/8\, x^2$ si $0 < x < 2$

$= 0$ si non

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt$ si $x \leq 0$ $F(x) = 0$

si $0 < x < 2$ $F(x) = \int_{-\infty}^0 0\, dt + \int_0^x 3/8\, t^2 dt$

$= 3/8 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{8}$

si $x > 2$ $F(x) = 1$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dots \end{cases}$

$f(x) = a e^{-x}$ si $x \geq 0$ a- Determiner a

$= 0$ si non $\int a e^{-x} dx = a \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left(e^{-x}\right)_0^{\infty} = a(0-(-1))$

a $= a \times 1 = 1$

d'où $a = 1$

$f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$

Fct de rép si x

$E(x) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$ $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$

$u = x^2$ $v' = e^{-x}$ $E(x^2) = \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 2$

$u' = 2x$ $v = -e^{-x}$ $V(x) = 2 - 1 = 1$

Chap 7 : Variables aléatoires Continues.

1- La loi exponentielle :

Déf : Une v.a suit une loi exponentielle de paramètre μ si sa fct de répartition est $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$ si $x \geq 0$

$= 0$ si non

μ est un paramètre réel positif

Densité : En dérivant $F(x)$ on obtient la densité d'une loi exponentielle. $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ si $x \geq 0$

$= 0$ si non

Paramètre :

Esp. math $E(x) = \frac{1}{\mu}$

Moment d'ordre 2 $E(x^2) = 2/\mu^2$

variance $V(x) = 1/\mu^2$

$E(x) = \int_0^{\infty} x f(x) dx$

$= \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\mu e^{-\mu x}}_{v'} dx$ $u = x$ $u' = 1$

$v' = \mu e^{-\mu x}$ $v = -e^{-\mu x}$

$= \underbrace{\left[x(-e^{-\mu x})\right]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-\mu x} dx$

$= \left[-1/\mu \, e^{-\mu x}\right]_0^{\infty} = 1/\mu$

$V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = \int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\mu e^{-\mu x}}_{v'} dx$

$u = x^2$ $u' = 2x$

$v' = \mu e^{-\mu x}$ $v = -e^{-\mu x}$

$E(x^2) = \left[x^2(-e^{-\mu x})\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\mu x} = 2\int_0^{\infty} x e^{-\mu x} dx$

$= 2/\mu^2$

Rappel : Chapitre 7

chapitre 7 : variables aléatoire continus.

I. La loi exponentielle.

une v.a suit une loi exponentiell de paramètre μ si sa ft° de répartition est

$F(x) = 1 - e^{\mu x}$ (si $x \geq 0$)
$= 0$ si non

μ est un paramatre reel positif.

propriété : En dérivant $F(x)$ on obtient la dérivé d'1 loi exponentiell

$f(x) = \mu e^{-\mu x}$ si $x \geq 0$
$= 0$ si non

paramètre :

* Esperence mathématique : $E(x) = \frac{1}{\mu}$

moment d'ordre 2 $E(x^2) = \frac{2}{\mu^2}$

Variance $V(x) = \frac{1}{\mu^2}$

$E(x) = \int_0^\infty x f(x)\, dx$

$= \int_0^\infty \underset{u}{x}\, \underset{v'}{\mu e^{-\mu x}}\, dx$

$\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \mu e^{-\mu x} & v = e^{-\mu x} \end{cases}$

$= [x - (e^{-\mu x})]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\mu x} dx$

$= [-\frac{1}{\mu} e^{-\mu x}]_0^\infty = \boxed{\frac{1}{\mu}}$

* $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = \int_0^\infty \underset{u}{x^2}\, \underset{v'}{\mu e^{-\mu x}}\, dx$

$u = x^2$ $u' = 2x$

$v' = \mu e^{-\mu x}$ $v = -e^{-\mu x}$

$E(x^2) = (x^2(-e^{-\mu x})]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\, e^{-\mu x}$

$= 2\int x\, e^{-\mu x} dx = \frac{2}{} \int_0^\infty x \mu e^{-\mu x} dx$

$$\phi(x) = \frac{2}{u^2} - \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^2}$$

II Loi Normale ou loi de la place Gauss

2.1 La loi normale centrée et réduite (LNCR)

Déf : Une v.a continue suit une LNCR si la fonction de densité est définie par :

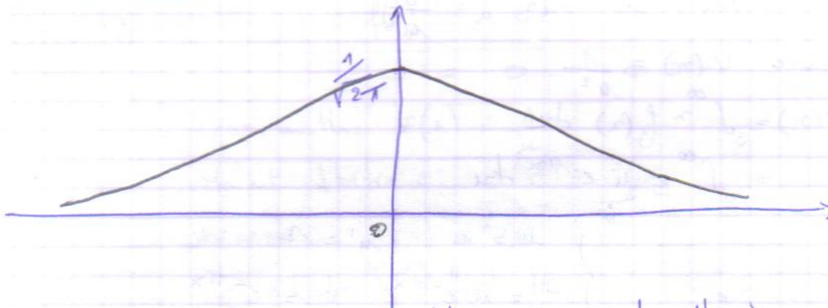
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

f est définie sur ℝ

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

f est paire $f(x) = f(-x)$





- f est une densité de prob d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

- La représentation graphique de la densité de prob f est appelée histogramme de la L.N.C.R.

Espérance mathématique : $E(x) = 0$.

De la v.a est dite centrée puisque $E(x) = 0$

Variance :

$V(x) = 1$
la v.a est dite réduite

$\sigma = 1$

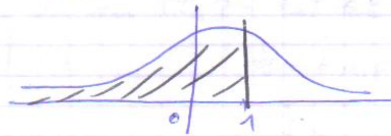
$$\begin{cases} E(x) = 0 \\ V(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{la v.a est dite centrée et réduite}$$

Notation : X suit une L.N.CR
est notée $X \sim N(0,1)$.

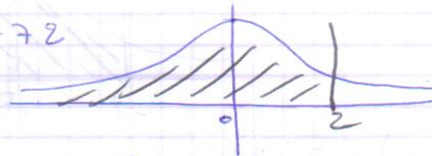
- calcul d'une prob sous une intégrale :
$P(a < X \leq b)$: pr calculer cette prob on fait appel à l'intégration numérique approchée
utilisation de la table donnant la fct° de répartition.
Soit u une v.a qui suit la L.N.CR

$X \sim N(0,1)$

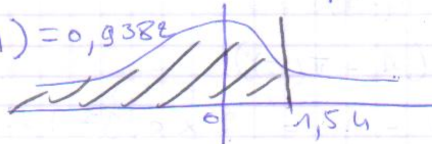
* $P(X < 1) = 0,8413$



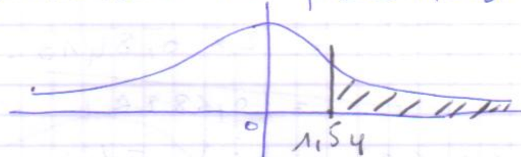
* $P(x < 2) = 0,9772$



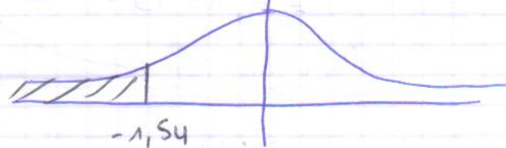
* $P(x < 1,54) = 0,9382$



* $P(X \geq 1,54) = 1 - P(x < 1,54) = 1 - 0,9382 = 0,0618$



* $P(x < -1,54) = 0,0618$



$P(x < -1,54) = \Pi(-1,54)$

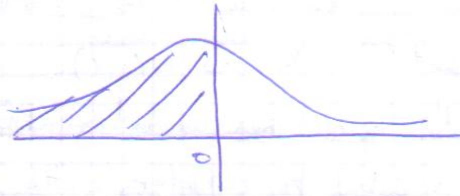
$1 - 0,9382 = 0,0618 = 1 - \Pi(1,54)$

* $P(x < -1) = (\Pi(-1))$

$P(x < -1) = 1 - \Pi(1)$



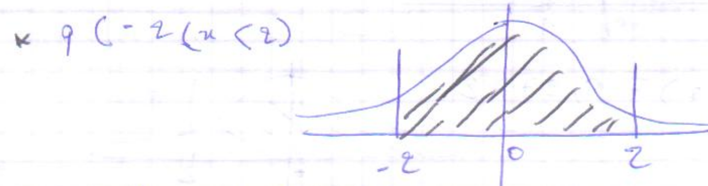
* $$p(x<0) = \Pi(0) = 0,5$$



* $$p(1<x<2) = \Pi(2) - \Pi(1)$$
$$= 0,9772 - 0,8413$$
$$= 0,1359$$

* $$p(0<x<2) = \Pi(2) - \Pi(0)$$
$$= 0,9772 - 0,5$$
$$= 0,4772.$$

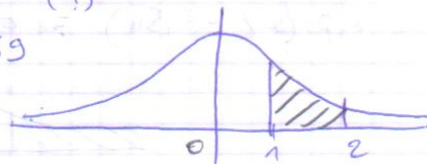
* $$p(-2<x<2)$$



$$= \Pi(2) - \Pi(-2)$$
$$= \Pi(2) - (1 - \Pi(2))$$
$$= 2\,\Pi(2) - 1 = 2 \times 0,9772 - 1 = 0,9544.$$

* $$p(-1<x<1) = 2\,\Pi(1) - 1$$
$$= 2 \times 0,8413 - 1$$
$$= 0,6826$$

* $$p(1<x<2) = \Pi(2) - \Pi(1)$$
$$= 0,1359$$



* $$p(-2<x<-1) = 0,1359$$
$$= \Pi(-1) - \Pi(-2)$$
$$= 1 - \Pi(1) - (1 - \Pi(2))$$
$$= \Pi(2) - \Pi(1)$$

III La Loi Normale $N(m, \sigma)$

Déf. : Une v.a continue suit une loi normale de paramètre m et σ notée $N(m, \sigma)$ (avec $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^*_+$) si elle admet par densité de prob la fct :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Notation : $X \sim N(m, \sigma)$

Si $m = 0$ $\sigma = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

où la densité de la loi normal. C.R.

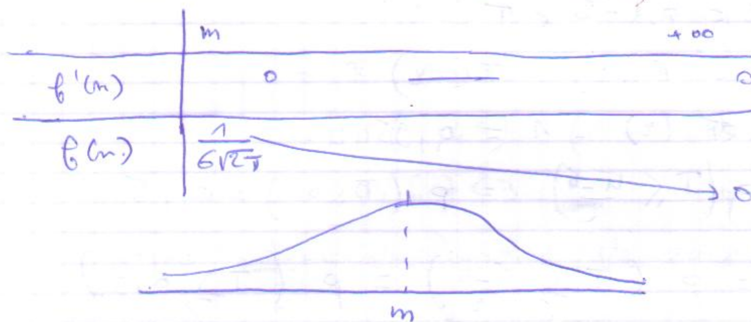
Étude de représentation graphique :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Si $x = m$ $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{x-m}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$



Caractéristique de la loi normale :

$E(x) = m$

$V(x) = \sigma^2$

$\sigma(x) = \sigma$

prob sur un intervalle

$X \sim N(m, \sigma)$

on peut effectuer un changt de variable.

$$T = \frac{X - m}{\sigma}$$

Il s'agit d'une variable aléatoire centrée et réduite

$$T \sim N(0,1)$$

exemple $X \sim N(5,3)$

Calculer la prob $(2 \leq x \leq 11)$

$$T = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{x-5}{3} \sim N(0,1)$$

$$p(2 \leq x \leq 11) = p\left(\frac{2-5}{3} \leq T \leq \frac{11-5}{3}\right)$$

$$= p(-1 \leq T \leq 2)$$

$$= \pi(2) - \pi(-1)$$

$$= \pi(2) - (1 - \pi(1))$$

$$= \pi(2) + \pi(1) - 1$$

$$= 0{,}9772 + 0{,}8413 - 1$$

$$= 0{,}8185$$

$X \sim N(4,2)$

$$p(0 < x < 8) = p\left(\frac{0-4}{2} < T < \frac{8-4}{2}\right)$$

$$= p(-2 < T < 2)$$

$$= \pi(2) - \pi(-2)$$

$$= 2\pi(2) - 1 = 0{,}9544.$$

$$P(x \leq 4) = p\left(T \leq \frac{4-4}{2}\right) = p(T \leq 0) = 0{,}5$$

$$P(x \geq 5) = p\left(T \geq \frac{5-4}{2}\right) = p(T \geq 0{,}5)$$

$$= 1 - \pi(0{,}5)$$

$$= 1 - 0{,}6915$$

$$= 0{,}3085$$

IV Approximation

4-1 Approximation de la loi binomial par la loi nor[male]

[Si] n est grand, alors la loi binomial $(B(n,p))$ peut ê[tre appr]oximer par une loi normal de paramètre

$$m = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

l'approximation est acceptable si

$n \geq 50 \quad np \geq 5$

$X \sim B(90, 0{,}48)$

Donner une approximation de cette loi binomiale

calculer $p(X < 45)$ et $p(40 < X < 50)$

$n \geq 50 \quad np = 43{,}2 > 5$

D'où $B(90, 0{,}48) \sim N(m, \sigma)$

$m = n.p \quad \sigma = \sqrt{npq}$

$m = 90 \times 0{,}48 = 43{,}2$

$\sigma = \sqrt{90 \times 0{,}48 \times 0{,}52} = 4{,}74$

$B(90, 0{,}48) \sim N(43{,}2 ; 4{,}76)$

$p(x < 45) = p\left(T < \frac{45 - 43{,}2}{4{,}74}\right)$

$= p(T < 0{,}38) = 0{,}6480$

$p(40 < X < 50) = p\left(\frac{40-43{,}2}{4{,}74} < T < \frac{50-43{,}2}{4{,}74}\right)$

$= p(-0{,}68 < T < 1{,}43)$

$= \Pi(1{,}43) - \Pi(0{,}68)$

$= \Pi(1{,}43) - (1 - \Pi(0{,}68))$

$= 0{,}6753$

Approximation de la loi de poisson par la loi normale

pr $\lambda > 20$. la loi normal constitue une bonne approximation de la loi de poison.

si $\lambda \geq 20 \quad P(\lambda) \sim N(\lambda ; \sqrt{\lambda})$.

$X \sim P(36)$

calculer $p(x > 42)$; $p(36 < x < 45)$

$P(36) \sim N(36, 6)$

$p(X > 42) = p\left(T > \frac{42-36}{6}\right)$

$p(T > 1) = 1 - \Pi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

$$p(36 < X < 45) = p\left(\frac{36-36}{6} < T < \frac{45-36}{6}\right)$$

$$= p(0 < T < 1,5)$$

$$= p(1,5) - \Pi(0)$$

$$= 0,9332 - 0,5$$

$$= 0,4332.$$